Littlewoodの倍角公式 (組合せ論的表現論をめぐる話題)

AUTHOR(S):

水川, 裕司

CITATION:

水川, 裕司. Littlewoodの倍角公式 (組合せ論的表現論をめぐる話題). 数理解析研究所講究録 2001, 1190: 50-60

ISSUE DATE:

2001-02

URL:

http://hdl.handle.net/2433/64738

数理解析研究所講究録
1190巻 2001年 50-60

Littlewoodの倍角公式

北大理　　水川裕司 (Hiroshi Mizukawa)
Division of Mathematics, Hokkaido University

1 Introduction

ここでは, 我々が”Littlewoodの倍角公式（Littlewood's multiple formula)”と呼んでいる対称群の指標に関する公式について述べる. この話は岡山大学の山田裕史氏との共同研究 [5] によるものである.

まず, 分割 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots)$ の “r 倍”, $r\lambda$ を次のように定義する.

$$r\lambda=(r\lambda_1,r\lambda_2,\ldots)$$

$\chi^{\lambda}(\rho)$ を n の分割 λ でパラメトライズされる対称群 S_n の既約指標の共役類 ρ 上での値とする. いま, S_2 の指標表とその共役類と表現を表す分割を “2倍”した S_4 の指標表の一部分を比較してみる.

S_2	(1^2)	(2)		S_4	(2^2)	(4)
(2)	1	1	$\longleftrightarrow$	(4)	1	1
(1^2)	1	-1		(2^2)	2	0

すると,

$$\begin{aligned}\chi^{(4)}(2\rho) &= \chi^{(2)}(\rho),\\ \chi^{(2^2)}(2\rho) &= \chi^{(2)}(\rho)+\chi^{(1^2)}(\rho)\end{aligned}$$

なる関係があることがわかる.

実は一般に次の公式が成り立つことが知られている.

Theorem 1.1. (Littlewoodの倍角公式, [2]) λ と ρ を n の分割, $(r\lambda)[0],(r\lambda)[1],\ldots,(r\lambda)[r-1]$ を $r\lambda$ の r−quotient とする. このとき,

$$\chi^{r\lambda}(r\rho)=\sum_{\nu\in P(n)} LR^{\nu}_{(r\lambda)[0],(r\lambda)[1],\ldots,(r\lambda)[r-1]}\chi^{\nu}(\rho)$$

が成り立つ（$P(n)$ は n の分割全体）.

ここでさらに上の観察を対称群のスピン指標に対しておこなってみる. $\zeta^{\lambda}(\rho)$ を λ でパラメトライズされるスピン指標 ρ 上での値とする. [1] の巻末の表を見てみると, まず S_4 ($\tilde{S}_4$) は

S_4	$(3,1)$	(1^4)
(4)	2	1
$(3,1)$	4	-1

となっておりこれを"3倍"した S_{12} ($\tilde{S}_{12}$) の部分は

S_{12}	$(9,3)$	(3^4)
(12)	2	1
$(9,3)$	4	-1

となり, 二つは全く一致している. ここで $SP(n)$ を n の分割でゼロでない和因子がすべて異なるもの, また $P_{odd}(n)$ を n の分割でゼロでない和因子がすべて奇数のものとおくと Theorem1.1 のスピン版として次が成立する.

Theorem 1.2. $\lambda \in SP(n)$, $\rho \in P_{odd}(n)$, r を奇数とする. このとき,

$$\zeta^{r\lambda}(r\rho) = \zeta^{\lambda}(\rho)$$

が成立する.

以下ではこれらの証明を行う.

2 Littlewoodの倍角公式

この章では r を正の整数として一つ固定する. $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$ を分割 (N は, λ の長さ $l(\lambda)$ 以上) とする.

いま λ に対して $(r+1)$ 個の分割 $(\lambda^c, \lambda[0], \ldots, \lambda[r-1])$ を次のように定義する ; λ^c を λ の r-core, そして, $\lambda^* = (\lambda[0], \ldots, \lambda[r-1])$ を λ の r-quotient とする (cf. [4, p12]). ここでは r-quotient の Littlewood-Richardson 係数 ($LR^{\mu}_{\lambda[0],\ldots,\lambda[r-1]}$) しか問題にしないので r-quotient の順序は無視してよい. 今, $r\lambda = (r\lambda_1, \ldots, r\lambda_N)$ に対して. 簡単に $r\lambda$ の r-core が $(r\lambda)^c = \emptyset$ となること, $(r\lambda)[0] = (\lambda_r, \lambda_{2r}, \lambda_{3r}, \ldots)$, $(r\lambda)[k] = (\lambda_{r-k}, \lambda_{2r-k}\lambda_{3r-k}, \ldots)(1 \le k \le r-1)$ がわかることに注意しておく.

次のような記号を導入する. 変数 $x_1, x_2, \ldots, x_N$ と整数 r に対して. $\boldsymbol{x}_N^r = (x_1^r, x_2^r, \ldots, x_N^r)$. そして $\omega = \exp(2\pi\sqrt{-1}/r)$ とおいて $x_{kN+i} = \omega^k x_i$ $(0 \le k \le r-1, 1 \le i \le N)$ なる変数に対して, $\boldsymbol{x}_{N,r} = (x_1, x_2, \ldots, x_{rN})$ と置く. この $\boldsymbol{x}_{N,r}$ を $\boldsymbol{x}_N$ の "r-inflation" と呼ぶことにする. $\delta_N = (N-1, N-2, \ldots, 1, 0)$ として, [4, p40] によって $\boldsymbol{x}_N$ を変数とする $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N)$ に関する Schur 関数を,

$$s_{\lambda}(\boldsymbol{x}_N) = \frac{\det A_{\lambda+\delta_N}(\boldsymbol{x}_N)}{\det A_{\delta_N}(\boldsymbol{x}_N)},$$

で定義する．ここで $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_N)$ という非負整数列に対し

$$A_\alpha(\boldsymbol{x}_N)=(x_i^{\alpha_j})_{1\le i,j\le N}$$

である．

さて，これから Theorem1. 1の証明を $\boldsymbol{x}_{N,r}$ を変数とする $r\lambda$ に関する Schur 関数の計算を通じて行う．

Theorem 2.1. $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_{rN})$ を任意の分割とする．

$$s_{r\lambda}(\boldsymbol{x}_{N,r})=\prod_{k=0}^{r-1}s_{(r\lambda)[k]}(\boldsymbol{x}_N^r).$$

証明． $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_N)$ なる非負整数列に対して，

$$X_N^{\alpha_j+N-j}=\begin{pmatrix} x_1^{\alpha_j+N-j}\\ x_2^{\alpha_j+N-j}\\ \vdots\\ x_N^{\alpha_j+N-j}\end{pmatrix},$$

とおく．これは行列 $A_{\alpha+\delta_N}(\boldsymbol{x}_N)$ の第 j-列目である．
始めに $s_{r\lambda}(\boldsymbol{x}_{N,r})$ の分子を見てみよう．

$$\begin{aligned}
&A_{r\lambda+\delta_{rN}}(\boldsymbol{x}_{N,r})=(\omega^{(i-1)(r-j)}X_N^{r\lambda_j+rN-j})_{1\le i\le r,1\le j\le rN}\\
&=\begin{pmatrix}
X_N^{r\lambda_1+rN-1} & X_N^{r\lambda_2+rN-2} & \dots & X_N^{r\lambda_{rN}}\\
\omega^{r-1}X_N^{r\lambda_1+rN-1} & \omega^{r-2}X_N^{r\lambda_2+rN-2} & \dots & X_N^{r\lambda_{rN}}\\
\omega^{2(r-1)}X_N^{r\lambda_1+rN-1} & \omega^{2(r-2)}X_N^{r\lambda_2+rN-2} & \dots & X_N^{r\lambda_{rN}}\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
\omega^{(r-1)(r-1)}X_N^{r\lambda_1+rN-1} & \omega^{(r-1)(r-2)}X_N^{r\lambda_2+rN-2} & \dots & X_N^{r\lambda_{rN}}
\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

ここで上の行列の列の並び替えを，置換 $\tau\in S_{rN}$ によって，

$$\tau(ir+j)=N(j-1)+(i+1)\quad(0\le i\le N-1,1\le j\le r).$$

と定義する．$p=\begin{pmatrix} x_1 & & & \\ & x_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & x_N\end{pmatrix}$ とおくと，

$$\begin{aligned}
&\det A_{r\lambda+\delta_{rN}}(\boldsymbol{x}_{N,r})\\
&=\mathrm{sgn}(\tau)|\omega^{(i-1)(r-j)}p^{r-j}A_{(r\lambda)[r-j]+\delta_N}(\boldsymbol{x}_N^r)|_{1\le i,j\le r}\\
&=\mathrm{sgn}(\tau)\times
\end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} p^{r-1}A_{(r\lambda)[r-1]+\delta_N}(\boldsymbol{x}_N^r) & p^{r-2}A_{(r\lambda)[r-2]+\delta_N}(\boldsymbol{x}_N^r) & \cdots & A_{(r\lambda)[0]+\delta_N}(\boldsymbol{x}_N^r) \\ p^{r-1}\omega^{r-1}A_{(r\lambda)[r-1]+\delta_N}(\boldsymbol{x}_N^r) & \cdots & \cdots & A_{(r\lambda)[0]+\delta_N}(\boldsymbol{x}_N^r) \\ p^{r-1}\omega^{2(r-1)}A_{(r\lambda)[r-1]+\delta_N}(\boldsymbol{x}_N^r) & \cdots & \cdots & A_{(r\lambda)[0]+\delta_N}(\boldsymbol{x}_N^r) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p^{r-1}\omega^{(r-1)(r-1)}A_{(r\lambda)[r-1]+\delta_N}(\boldsymbol{x}_N^r) & \cdots & \cdots & A_{(r\lambda)[0]+\delta_N}(\boldsymbol{x}_N^r) \end{vmatrix}$$

$$= \operatorname{sgn}(\tau) \begin{vmatrix} 1_N & 1_N & \cdots & 1_N \\ \omega^{r-1}1_N & \omega^{r-2}1_N & \cdots & \omega^{r-r}1_N \\ \omega^{2(r-1)}1_N & \omega^{2(r-2)}1_N & \cdots & \omega^{2(r-r)}1_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega^{(r-1)(r-1)}1_N & \omega^{(r-1)(r-2)}1_N & \cdots & \omega^{(r-1)(r-r)}1_N \end{vmatrix}$$

$$\times \begin{vmatrix} |p|^{r-1}1_N & & & 0 \\ & |p|^{r-2}1_N & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & |p|^0 1_N \end{vmatrix}$$

$$\times \begin{vmatrix} A_{(r\lambda)[r-1]+\delta_N}(\boldsymbol{x}_N^r) & & & 0 \\ & A_{(r\lambda)[r-2]+\delta_N}(\boldsymbol{x}_N^r) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_{(r\lambda)[0]+\delta_N}(\boldsymbol{x}_N^r) \end{vmatrix}$$

を得る．このようにして，

$$\det A_{r\lambda+\delta_{rN}}(\boldsymbol{x}_{N,r}) = \operatorname{sgn}(\tau)|p|^\alpha c \prod_{k=0}^{r-1} \det\left(A_{(r\lambda)[r-k]+\delta_N}(\boldsymbol{x}_N^r)\right) \tag{1}$$

を得る．ここで

$$\begin{cases} \alpha = \sum_{j=1}^r (r-j) = \binom{r}{2} \\ c = \det(\omega^{(i-1)(r-j)}1_N). \end{cases}$$

と置いた．分母は上の計算で，$\lambda = (0, \ldots, 0)$ と置くと，

$$\det A_{\delta_{rN}}(\boldsymbol{x}_{N,r}) = \operatorname{sgn}(\tau)|p|^\alpha c \left(\det A_{\delta_N}(\boldsymbol{x}_N^r)\right)^r. \tag{2}$$

となる. (1) と (2) から,

$$
\begin{aligned}
s_{r\lambda}(\boldsymbol{x}_{N,r}) &= \frac{\det A_{r\lambda+\delta_{rN}}(\boldsymbol{x}_{N,r})}{\det A_{\delta_{rN}}(\boldsymbol{x}_{N,r})} \\
&= \prod_{k=0}^{r-1} \frac{\det A_{(r\lambda)[k]+\delta_{rN}}(\boldsymbol{x}_N^r)}{\det A_{\delta_N}(\boldsymbol{x}_N^r)} \\
&= \prod_{k=0}^{r-1} s_{(r\lambda)[k]}(\boldsymbol{x}_N^r)
\end{aligned}
$$

となり定理が示せた. □

上の定理の右辺を Littlewood-Richardson 係数を用い展開してやると,

$$
\prod_{k=0}^{r-1} s_{\lambda[k]}(\boldsymbol{x}_N^r) = \sum_{\nu \in P(n)} LR^{\nu}_{(r\lambda)[0],(r\lambda)[1],\dots,(r\lambda)[r-1]} s_\nu(\boldsymbol{x}_N^r). \tag{3}
$$

が得られることに注意しておく.
これから, 上の定理を対称群の既約指標の言葉で言い換える. そのために冪和対称関数を,

$$
p_m(\boldsymbol{x}_N) = \sum_{i=1}^{N} x_i^m \quad (m = 1, 2, \dots).
$$

と置いたとき, $\rho = (\rho_1, \rho_2, \dots)$ に対して,

$$
p_\rho = p_{\rho_1} p_{\rho_2} \cdots .
$$

で定義する. また次の公式 (Frobenius の公式) が知られている.

$$
s_\lambda(\boldsymbol{x}_N) = \sum_{\rho \in P(n)} z_\rho^{-1} \chi^\lambda(\rho) p_\rho(\boldsymbol{x}_N),
$$

ここで分割 $\rho = (1^{m_1} 2^{m_2} \dots n^{m_n})$ に対して,

$$
z_\rho = \prod_{i=1}^{n} m_i!\ i^{m_i}
$$

である. $\boldsymbol{x}_N$ の r-inflation に対して次の公式が成り立つ.

Lemma 2.2.

$$
p_m(\boldsymbol{x}_{N,r}) = \begin{cases} r p_m(\boldsymbol{x}_N) & m \equiv 0 (\mathit{mod}\ r), \\ 0 & m \not\equiv 0 (\mathit{mod}\ r). \end{cases}
$$

証明.

$$p_m(\boldsymbol{x}_{N,r}) = \sum_{i=1}^{rN} x_i^m$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{k=0}^{r-1} (\omega^k x_i)^m \right) = \begin{cases} r \displaystyle\sum_{i=1}^{N} x_i^m & m \equiv 0 (\mathrm{mod}\ r), \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{1-(\omega^m)^r}{1-\omega^m} x_i^m = 0 & m \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\ r). \end{cases}$$

□

この Lemma と Frobenius の公式から,

$$\begin{aligned} s_{r\lambda}(\boldsymbol{x}_{N,r}) &= \sum_{\rho \in P(rn)} z_\rho^{-1} \chi^{r\lambda}(\rho) p_\rho(\boldsymbol{x}_{N,r}) \\ &= \sum_{\rho \in P(n)} z_{r\rho}^{-1} \chi^{r\lambda}(r\rho) r^{l(\rho)} p_{r\rho}(\boldsymbol{x}_N) \\ &= \sum_{\rho \in P(n)} z_\rho^{-1} \chi^{r\lambda}(r\rho) p_\rho(\boldsymbol{x}_N^r). \end{aligned}$$

これと Theorem2.1 と (3) より,

$$\begin{aligned} &\sum_{\rho \in P(n)} z_\rho^{-1} \chi^{r\lambda}(r\rho) p_\rho(\boldsymbol{x}_N^r) \\ = &\sum_{\nu \in P(n)} LR^{\nu}_{(r\lambda)[0],(r\lambda)[1],\dots,(r\lambda)[r-1]} \left[\sum_{\rho \in P(n)} z_\rho^{-1} \chi^\nu(\rho) p_\rho(\boldsymbol{x}_N^r) \right] \\ = &\sum_{\rho \in P(n)} \left(\sum_{\nu \in P(n)} LR^{\nu}_{(r\lambda)[0],(r\lambda)[1],\dots,(r\lambda)[r-1]} \chi^\nu(\rho) \right) z_\rho^{-1} p_\rho(\boldsymbol{x}_N^r). \end{aligned}$$

を得, p_ρ は線形独立であるから両辺比較して,

$$\chi^{r\lambda}(r\rho) = \sum_{\nu \in P(n)} LR^{\nu}_{(r\lambda)[0],(r\lambda)[1],\dots,(r\lambda)[r-1]} \chi^\nu(\rho)$$

となり, これで Littlewood の倍角公式 (Theorem1.1) が得られた.

3 Spin Characters

この章では Littlewood の倍角公式のスピン指標版の証明を行う. 前章で Schur 関数が果たした役割はこの章では Schur の P-関数が果たす.

はじめにこの Schur の P-関数を J. J. C. Nimmo [7, Appendix] に倣って定義する. 分割 $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_l)$ は $\lambda_1>\ldots>\lambda_l>0$ のとき strict partition という. n の strict partition の全体を一章で定義した通り $SP(n)$ と書く.

strict partition $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_l)$ に対して,

$$A(\boldsymbol{x}_N)=\left(\frac{x_i-x_j}{x_i+x_j}\right)_{1\le i,j\le N},$$

$$D_\lambda(\boldsymbol{x}_N)=(x_i^{\lambda_j})_{1\le i\le N,\ 1\le j\le l}$$

と置く.

$$A_\lambda(\boldsymbol{x}_N)=\begin{pmatrix} A(\boldsymbol{x}_N) & D_\lambda(\boldsymbol{x}_N)\\ -{}^tD_\lambda(\boldsymbol{x}_N) & 0\end{pmatrix}$$

と $N+l$ 次の交代行列を定義する. $N+l$ が偶数の時, $\mathrm{Pf}_\lambda(\boldsymbol{x}_N)$ を $A_\lambda(\boldsymbol{x}_N)$ のパフィアンと定義し, また $N+l$ が奇数の時 $x_{N+1}=0$ と置いて $A_\lambda(\boldsymbol{x}_{N+1})$ のパフィアンと定義する. とくに $\lambda=\emptyset$ のとき,

$$\mathrm{Pf}_\emptyset(\boldsymbol{x}_N)=\begin{cases}\mathrm{Pf}A(\boldsymbol{x}_N), & \text{if } N \text{ is even},\\ \mathrm{Pf}A(\boldsymbol{x}_{N+1}), & \text{if } N \text{ is odd}.\end{cases}$$

である. この $\mathrm{Pf}_\emptyset(\boldsymbol{x}_N)$ について次の式が知られている ([4, Chap3, 8-ex. 18]).

$$\mathrm{Pf}_\emptyset(\boldsymbol{x}_N)=\prod_{1\le i<j\le N}\frac{x_i-x_j}{x_i+x_j}. \tag{4}$$

ここで strict partition λ に対する P-関数を次で定義する.

$$P_\lambda(\boldsymbol{x}_N)=\frac{\mathrm{Pf}_\lambda(\boldsymbol{x}_N)}{\mathrm{Pf}_\emptyset(\boldsymbol{x}_N)}.$$

この章を通じて r を奇数とする.

Lemma 3.1.

$$\mathrm{Pf}_\emptyset(\boldsymbol{x}_{N,r})=c_r\{\mathrm{Pf}_\emptyset(\boldsymbol{x}_N^r)\}^r,$$

ここで c_r はゼロではない複素数.

証明.

$$B_k=\left(\frac{x_i-\omega^k x_j}{x_i+\omega^k x_j}\right)_{1\le i,j\le N}\qquad (0\le k\le r-1).$$

と置く．$1 \leq k \leq r-1$ に対して ${}^tB_0 = -B_0$ と ${}^tB_k = -B_{r-k}$ が成り立つので $N+l$ が偶数ならば,

$$\mathrm{Pf}_\emptyset(\boldsymbol{x}_{N,r}) = \begin{vmatrix} B_0 & B_1 & B_2 & \dots & B_{r-1} \\ B_{r-1} & B_0 & B_1 & \dots & B_{r-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B_1 & B_2 & B_3 & \dots & B_0 \end{vmatrix}^{1/2},$$

また $N+l$ が奇数ならば,

$$\mathrm{Pf}_\emptyset(\boldsymbol{x}_{N,r}) = \begin{vmatrix} B_0 & B_1 & B_2 & \dots & B_{r-1} & 1 \\ B_{r-1} & B_0 & B_1 & \dots & B_{r-2} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B_1 & B_2 & B_3 & \dots & B_0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 0 \end{vmatrix}^{1/2},$$

と書ける．$0 \leq k \leq r-1$ なる k に対して,

$$b_k^+ = \prod_{1 \leq i < j \leq N} \frac{x_i - \omega^k x_j}{x_i + \omega^k x_j}, \quad b_k^- = \prod_{1 \leq j < i \leq N} \frac{x_i - \omega^k x_j}{x_i + \omega^k x_j},$$

そして,

$$d_k \quad = \quad \left(\frac{1-\omega^k}{1-\omega^k}\right)^N$$

とおく．

$$b_k^- = (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}} b_{r-k}^+,$$

なので,

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{r-1} b_k^+ &= \prod_{1 \leq i < j \leq N} \left(\prod_{k=0}^{r-1} \frac{x_i - \omega^k x_j}{x_i + \omega^k x_j} \right) \\ &= \prod_{1 \leq i < j \leq N} \frac{x_i^r - x_j^r}{x_i^r + x_j^r} \\ &= \mathrm{Pf}_\emptyset(\boldsymbol{x}_N^r).\end{aligned}$$

(3) から,

$$\mathrm{Pf}_\emptyset(\boldsymbol{x}_{N,r}) = c_r\left(\prod_{k=0}^{r-1} b_k^+\right)^r = c_r\{\mathrm{Pf}_\emptyset(\boldsymbol{x}_N^r)\}^r,$$

が得られる．ここで

$$c_r = \prod_{k=1}^{r-1} d_k^{r-k},$$

でありこれはゼロではない． □

Theorem 3.2. 任意の *strict partition* $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_l)$ に対して,

$$P_{r\lambda}(\boldsymbol{x}_{N,r})=P_\lambda(\boldsymbol{x}_N^r).$$

証明. ここでは $N+l$ が偶数の場合のみ考える（奇数であってもほとんど変わらない）. 始めに Schur の P-関数の定義式の分子を見る.

$$D=D_\lambda(\boldsymbol{x}_N^r)$$

とおく. $rN+l$ が偶数の時は,

$$\mathrm{Pf}_{r\lambda}(\boldsymbol{x}_{N,r})=\begin{vmatrix} B_0 & B_1 & B_2 & \dots & B_{r-1} & D \\ B_{r-1} & B_0 & B_1 & \dots & B_{r-2} & D \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B_1 & B_2 & B_3 & \dots & B_0 & D \\ -{}^tD & -{}^tD & -{}^tD & \dots & -{}^tD & 0 \end{vmatrix}^{1/2}.$$

であった. この中身に次のような基本変形を施す:

1. r 行目を 1 行目, 2 行目, $\dots$, $(r-1)$ 行目から引く.
2. r 列目を 1 列目, 2 列目, $\dots$, $(r-1)$ 列目から引く.
3. r 行目に 1 行目, 2 行目, $\dots$, $(r-1)$ 行目の $1/r$ 倍を足す.
4. r 列目に 1 列目, 2 列目, $\dots$, $(r-1)$ 列目の $1/r$ 倍を足す.

すると $B=1/r\sum_{k=0}^{r-1}B_k$ と置いて,

$$\begin{aligned}\mathrm{Pf}_{r\lambda}(\boldsymbol{x}_{N,r}) &= \begin{vmatrix} A' & 0 & 0 \\ 0 & B & D \\ 0 & -{}^tD & 0 \end{vmatrix}^{1/2} \\ &= \mathrm{Pf}(A')\begin{vmatrix} B & D \\ -{}^tD & 0 \end{vmatrix}^{1/2}\end{aligned}$$

が得られる (ここで A' は $N(r-1)$ 次の交代行列 である). B の (i,j) 成分は

$$\frac{1}{r}\sum_{k=0}^{r-1}\frac{x_i-\omega^k x_j}{x_i+\omega^k x_j} = \frac{x_i^r-x_j^r}{x_i^r+x_j^r},$$

であり, Lemma3.1 より　$\mathrm{Pf}(B)=\mathrm{Pf}_\emptyset(\boldsymbol{x}_N^r)$ である. それゆえ,

$$\begin{vmatrix} B & D \\ -{}^tD & 0 \end{vmatrix}^{1/2}=\mathrm{Pf}_\lambda(\boldsymbol{x}_N^r).$$

また, 分母は上の計算で $\lambda=\emptyset$ とおいて

$$\begin{aligned}\mathrm{Pf}_{\emptyset}(\boldsymbol{x}_{N,r}) &= \begin{vmatrix} A' & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix}^{1/2} \\ &= \mathrm{Pf}(A')\mathrm{Pf}_{\emptyset}(\boldsymbol{x}_N^r)\end{aligned}$$

となる. この左辺は Lemma3.1 より $c_r\{\mathrm{Pf}_{\emptyset}(\boldsymbol{x}_N^r)\}^r$ なので,

$$\mathrm{Pf}(A') = c_r\{\mathrm{Pf}_{\emptyset}(\boldsymbol{x}_N^r)\}^{r-1}$$

を得る. 結局,

$$\begin{aligned}P_{r\lambda}(\boldsymbol{x}_{N,r}) &= \frac{\mathrm{Pf}_{r\lambda}(\boldsymbol{x}_{N,r})}{\mathrm{Pf}_{\emptyset}(\boldsymbol{x}_{N,r})} \\ &= \frac{c_r\{\mathrm{Pf}_{\emptyset}(\boldsymbol{x}_N^r)\}^{r-1}\mathrm{Pf}_{\lambda}(\boldsymbol{x}_N^r)}{c_r\{\mathrm{Pf}_{\emptyset}(\boldsymbol{x}_N^r)\}^r} \\ &= P_{\lambda}(\boldsymbol{x}_N^r).\end{aligned}$$

が得られた. □

これをスピン指標の言葉で言い直すために次の Frobenius の公式のスピン版を書いておく.

$$P_{\lambda}(\boldsymbol{x}_N) = \sum_{\rho\in P_{odd}(n)} 2^{(l(\rho)-l(\lambda)+\epsilon(\lambda))/2} z_{\rho}^{-1}\zeta^{\lambda}(\rho)p_{\rho}(\boldsymbol{x}_N),$$

ここで,

$$\epsilon(\lambda) = \begin{cases} 0, & \text{if } n-l(\lambda) \text{ is even,} \\ 1, & \text{if } n-l(\lambda) \text{ is odd.} \end{cases}$$

である.
あとは前章と同様に冪和対称関数の係数の比較をすることにより Littlewood の倍角公式のスピン版 (Theorem1.2) が得られる.

参考文献

[1] P. N. Hoffman and J. F. Humphreys, *Projective Representations of the Symmetric Groups,* Oxford, 1992.

[2] D. E. Littlewood, *The Theory of Group Characters, 2nd. ed.* , Oxford, 1950.

[3] D. E. Littlewood, Modular representations of symmetric groups, Proc. Royal Soc. A 209 (1951), 333-353.

[4] I. G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials, 2nd. ed.* , Oxford, 1995.

[5] H. Mizukawa and H. -F. Yamada, Littlewood's multiple formula for spin characters of symmetric groups, preprint (2000).

[6] A. O. Morris, The spin representation of the symmetric group, Proc. London Math. Soc. (3) 12 (1962), 55-76.

[7] J. J. C. Nimmo, Hall-Littlewood symmetric functions and the BKP equation, J. Phys. A: Math. Gen. 23 (1990), 751-760.